

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 88/77

AUGUSTUS

G.J.M. LAAN

FOURIER-COËFFICIËNTEN EN VERZWAKKINGSFACTOREN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

Fourier-coëfficiënten en verzwakkingsfactoren

door

G.J.M. Laan

ABSTRACT

Uitgangspunt voor deze publicatie is een artikel van de hand van W. GAUTSCHI, getiteld: *Attenuation Factors in practical Fourier Analysis* [2].

Een uiteenzetting van de door Gautschi behandelde methode wordt gegeven en aan de hand van voorbeelden, uitgewerkt met behulp van een ALGOL 60 programma en voorzien van commentaar en interpretaties.

TREFWOORDEN: *Fourier-coëfficiënten, Fast Fourier Transform, verzwakkingsfactoren.*

VOORWOORD

In deze publicatie wil ik verslag doen van mijn bevindingen met de techniek van het berekenen van Fourier-coëfficiënten met behulp van zogenaamde verzwakkingsfactoren.

Bij dit onderzoek heb ik veel steun gevonden bij, en ben daarom dank verschuldigd aan, de leden van de afdeling TW. In het bijzonder wil ik N.M. Temme hartelijk danken voor zijn belangstelling en stimulerende bijdragen bij het tot stand komen van dit onderzoek.

INHOUDSOPGAVE

VOORWOORD	i
1. DFT EN FFT.	1
2. FOURIER-COËFFICIËNTEN	2
3. VERGELIJK TUSSEN FOURIER-COËFFICIËNTEN EN HUN DOOR DFT BENADERDE WAARDEN	3
4. VOORBEREIDING STELLING OVER VERZWAKKINGSFACTOREN.	6
5. OVER TRANSLATIEINVARIANTIE EN LINEARITEIT VAN HET APPROXIMATIE- PROCES.	8
6. VERZWAKKINGSFACTOREN.	11
7. SPECIALE GEVALLEN VAN VERZWAKKINGSFACTOREN.	13
8. VOORBEELDEN	14
9. CONCLUSIES.	21
10. VOORBEELD VAN EEN ALGOL 60 PROGRAMMA.	22
LITERATUUR.	23
APPENDIX.	24

1. DFT en FFT

Alvorens over te gaan tot de behandeling van het begrip *verzwakkingsfactoren* is het nuttig iets te zeggen over de Fast Fourier Transform (FFT).

De FFT is in wezen niets anders dan een algoritme die

1. de Discrete Fourier Transformatie (DFT) berekent;
2. dit efficiënt doet.

Ik zal beide punten enigszins toelichten:

Ad 1:

Zij $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T$ een complexe kolomvector van lengte n , en zij A een $n \times n$ -matrix met $A[j, k] = e^{-2\pi i j k / n}$, $0 \leq j, k \leq n-1$, dan heet de vector Af , waarvan de j -de component gegeven wordt door

$$(1) \quad \beta_j = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-2\pi i j k / n}, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

de *discrete Fourier-getransformeerde* van f .

Schrijven we $w = e^{-2\pi i / n}$ (en $w^m = e^{-2\pi i m / n}$) dan wordt, voor $n = 4$, in matrix-notatie, de DFT gegeven door

$$\begin{pmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Ad 2:

Wanneer men een $n \times n$ -matrix met een n -vector vermenigvuldigt dan zijn daar in het algemeen n^2 (complexe) vermenigvuldigingen en $n(n-1)$ (complexe) optellingen voor nodig. Een dergelijke bewerking is dus van de orde $O(n^2)$.

In het speciale geval van de DFT is het mogelijk, indien $n = 2^\gamma$ ($\gamma \in \mathbb{N}$), het aantal bewerkingen benodigd voor de matrix-vector vermenigvuldiging terug te brengen tot $n\gamma/2$ vermenigvuldigingen en $n\gamma$ optellingen. Deze bewerking is dus van de orde $O(n \log n)$.

Hoe dit precies in zijn werk gaat valt buiten het bestek van dit rapport. Overigens is er zeer veel literatuur over de FFT voorhanden; ik

volsta echter te verwijzen naar E.O. BRIGHAM [1] en de literatuurlijst aldaar.

2. FOURIER-COËFFICIËNTEN

In deze paragraaf zal ik een verbinding leggen tussen het begrip Fourier-coëfficiënt en het begrip DFT uit de vorige paragraaf.

Zij $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ absoluut continu en } 2\pi\text{-periodiek}\}$. Het is uit de Fourier-analyse bekend dat iedere functie f uit F zich voor alle x in een convergente Fourier-reeks laat ontwikkelen:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{jix};$$

de coëfficiënten c_j worden gegeven door

$$(2) \quad c_j = c_j(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jix} dx.$$

De coëfficiënten $c_j(f)$ heten de *Fourier-coëfficiënten* van f en zij zijn het waar het in dit rapport om draait.

Een eenvoudige benadering van bovenstaande integraal kan met behulp van de trapeziumregel verkregen worden. Men deelt het interval $[0, 2\pi]$ op in n gelijke stukken; schrijft

$$x_k = 2\pi k/n \quad \text{en} \quad f_k = f(x_k) \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, n$$

en de trapeziumregel op (2) toegepast geeft

$$\beta_j = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \left[\frac{f_0}{2} + f_1 e^{-jix_1} + \dots + f_{n-1} e^{-jix_{n-1}} + \frac{f_n}{2} e^{-jix_n} \right].$$

Wegens de periodiciteit van f geldt $f_0 = f_n$ en vindt men

$$\beta_j = \beta_j(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_k}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

als benadering voor $c_j(f)$.

Uit de vorige paragraaf (vgl. (1)) blijkt dat dit precies de DFT van $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ is (op de factor van $\frac{1}{n}$ na), welke efficiënt door de algoritme FFT berekend kan worden.

In de volgende paragraaf zal ik onderzoeken hoe hecht de nu gelegde verbinding tussen Fourier-coëfficiënten en discrete Fourier-transformatie eigenlijk is.

3. EEN VERGELIJK TUSSEN FOURIER-COËFFICIËNTEN EN HUN DOOR DFT BENADERDE WAARDEN

In verband met de geïmplementeerde algoritme FFT wordt het getal n , waar in dit verslag steeds sprake van is, geacht een gehele macht van 2 te zijn (en dus zeker even). Bovendien is de functie f steeds een element van F .

Zij nu $\mathbb{F}_n = \{(f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid f_k \in \mathbb{R}, f_{k+n} = f_k \text{ voor alle } k \in \mathbb{Z}\}$. Een $f \in \mathbb{F}_n$ is dus een tweezijdig oneindige rij reële getallen met periode n : $f = (\dots, f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, \dots)$.

Het is duidelijk dat, uitgaande van $f \in F$ en $f_k = f(x_k)$, $x_k = \frac{2\pi k}{n}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$ schrijvende, we een element $f \in \mathbb{F}_n$ krijgen. Er is dus sprake van een "natuurlijke" afbeelding $F \rightarrow \mathbb{F}_n$.

Zij verder $\mathbb{G}_n = \{(f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid f_k \in \mathbb{C}, f_{k+n} = f_k \text{ voor alle } k \in \mathbb{Z}\}$.

Ik vervolg nu met een opsomming van eigenschappen van Fourier-coëfficiënten en hun door DFT benaderde waarden, zoals die her en der verspreid in de literatuur voorkomen:

- a. Een in het ooglopend verschil is het asymptotisch gedrag. Aangezien de Fourier-reeks

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{jix}$$

convergent is voor alle x , volgt voor $x = 0$ uit

$$f(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j$$

dat

$$\lim_{|j| \rightarrow \infty} c_j = 0.$$

De door de DFT benaderde waarden van c_j :

$$\beta_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_k}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

zijn daarentegen periodiek met periode n , immers:

$$\begin{aligned} \beta_{j+n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_{k+n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-ji2\pi(k+n)/n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-ji2\pi k/n} \cdot e^{-ji2\pi} = \beta_j. \end{aligned}$$

DFT kan dus opgevat worden als een afbeelding $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{C}_n$.

De volgende eigenschap hebben c_j en β_j gemeen:

$$b. \quad c_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jix} dx, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ;$$

hieruit volgt

$$c_{-j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{+jix} dx, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

en dus

$$c_{-j} = \overline{c_j}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Evenzo volgt deze eigenschap voor DFT. Dus:

$$\beta_{-j} = \overline{\beta_j}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

c. Nemen we de eigenschappen onder a. en b. samen, dan volgt voor DFT:

$$\beta_{n-j} \stackrel{(a)}{=} \beta_{-j} \stackrel{(b)}{=} \overline{\beta_j}.$$

Het is zonder meer duidelijk dat de Fourier-coëfficiënten, die immers niet van n afhankelijk zijn, een dergelijke eigenschap niet vertonen.

Alvorens over te gaan tot het afleiden van de volgende eigenschappen voer ik, in navolging van VAN DER LAAN [5], de begrippen symmetrisch en anti-symmetrisch in.

DEFINITIE. $f \in \mathbb{F}_n$ heet *symmetrisch* als $f_{n-k} = f_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

VOORBEELD voor $n = 6$:

$$\begin{aligned} f &= (\dots, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \dots) \\ &= (\dots, 4, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 2, 1, \dots). \end{aligned}$$

d. Voor DFT met $f \in \mathbb{F}_n$, f symmetrisch geldt: $\text{Im } \beta_j = 0$.

BEWIJS. $n \text{Im } \beta_j = \text{Im} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_k} = - \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin \frac{2\pi jk}{n}$. Voor $k = 0$ en $k = \frac{n}{2}$ is de sinusterm gelijk aan nul, dus

$$\begin{aligned} n \text{Im } \beta_j &= - \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f_k \sin x_{kj} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} f_k \sin x_{kj} \right] \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f_k \sin x_{kj} + \sum_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{n-\ell} \sin \frac{2\pi j(n-\ell)}{n} \right] \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f_k \sin x_{kj} - \sum_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} f_\ell \sin x_{\ell j} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

DEFINITIE. $f \in \mathbb{F}_n$ heet *anti-symmetrisch* als $f_{n-k} = -f_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

Voor een dergelijke f geldt dan ook nog:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{n-0} = -f_0, \quad \text{dus } f_0 = 0; \\ f_{n/2} &= -f_{n/2}, \quad \text{dus } f_{n/2} = 0. \end{aligned}$$

Met deze wetenschap en op soortgelijke wijze als onder d, volgt nu

e. Met $f \in \mathbb{F}_n$, f anti-symmetrisch, geldt voor DFT:

$$\text{Re } \beta_j = 0.$$

In het volgende punt worden de eigenschappen c en d respectievelijk c en e samengevat.

f. 1. Als $f \in \mathbb{F}_n$ en f is symmetrisch, dan geldt:

$\beta_j \in \mathbb{R}$ en β is symmetrisch.

2. Als $f \in \mathbb{F}_n$ en f is anti-symmetrisch, dan geldt:

$\beta_j \in i\mathbb{R}$ en β is anti-symmetrisch.

De eigenschappen "symmetrisch" en "anti-symmetrisch" zijn dan invariant onder de transformatie DFT.

4. VOORBEREIDING STELLING OVER VERZWAKKINGSFACTOREN

Het zal uit de eigenschappen die voorkomen in de vorige paragraaf duidelijk zijn, dat de door DFT berekende coëfficiënten β_j voor grotere waarden van j ($j > \frac{n}{2}$) een slechte benadering voor de gevraagde Fourier-coëfficiënten zijn. Men zou minstens van een benadering kunnen verlangen dat de coëfficiënten tot nul naderen voor grote j, maar zelfs hieraan wordt door de β_j niet voldaan.

Om dit nu te ondervangen doet W. Gautschi het volgende: de gegeven waarden f_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, worden geapproximeerd door een functie ϕ , van deze functie worden de Fourier-coëfficiënten $c_j(\phi)$ als benadering voor de gevraagde $c_j(f)$ genomen.

Het blijkt dat de coëfficiënten $c_j(\phi)$ zich laten schrijven als

$$c_j(\phi) = \tau_j \cdot \beta_j(f), \quad j = 0, \pm 1, 2, \dots,$$

waarin $\beta_j(f)$, zoals steeds, verkregen wordt uit DFT, en de τ_j constanten zijn, onafhankelijk van f, slechts afhankelijk van het approximatieproces.

Alvorens dit in een stelling precies te formuleren worden eerst enige notaties en begrippen ingevoerd.

Om te beginnen beschouwen we de verzamelingen F en $\mathbb{F}_n$, die al in de vorige paragraaf zijn ingevoerd. Voor het gemak van de lezer herhaal ik hier hun betekenis:

$$F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ absoluut continu en } 2\pi\text{-periodiek}\},$$

$$\mathbb{F}_n = \{(f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid f_k \in \mathbb{R}, f_{k+n} = f_k \text{ voor alle } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wij kiezen nu een (hier niet nader te omschrijven) approximatieproces P (men zou kunnen denken aan interpolatie d.m.v. splines), zodanig dat P aan ieder oneindig rijtje reële getallen f uit $\mathbb{F}_n$ een functie ϕ uit F toevoegt. Kort gezegd:

$$P: \mathbb{F}_n \rightarrow F, \quad \phi = P(f).$$

De beide verzamelingen F en $\mathbb{F}_n$ kan men met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging als vectorruimten opvatten.

Een basis voor de n -dimensionale vectorruimte $\mathbb{F}_n$ wordt gegeven door

$$e^{(k)} = (e_j^{(k)})_{j \in \mathbb{Z}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

met

$$e_j^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{als } k \equiv j \pmod{n} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Zo is bijvoorbeeld voor $n = 4$

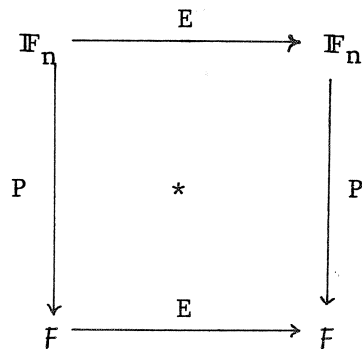
$$\begin{aligned} e^{(0)} &= (\dots, e_0^{(0)}, e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, e_3^{(0)}, \dots) \\ &= (\dots, 1, 0, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Tenslotte voeren we de translatieoperator E nog in, zowel werkend op F als op $\mathbb{F}_n$ en wel als volgt:

$$E: \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n \text{ is gegeven door } (Ef)_k = f_{k-1} \text{ voor alle } k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} E: F \rightarrow F \text{ is gegeven door } (E\phi)(x) &= \phi(x-h) \text{ voor alle } \phi \in F \\ &\text{met } h = x_1 = \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Een approximatieproces P heet *translatieinvariant*, indien $P(E(f)) = E(P(f))$ voor alle $f \in \mathbb{F}_n$ dat wil zeggen, indien het onderstaande diagram commutatief is.



Voordat de in de titel van deze paragraaf aangekondigde stelling bewezen wordt, een stelling waarin van de translatieoperator P geëist wordt dat hij zowel translatieinvariant is als lineair, zal ik in de volgende paragraaf deze beide eisen aan een nader onderzoek onderwerpen.

5. OVER TRANSLATIEINVARIANTIE EN LINEARITEIT VAN HET APPROXIMATIEPROCES

Illustratief voor beide eigenschappen is het volgende (tegen-)voorbeeld:

Neem

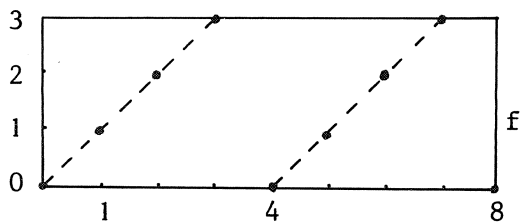
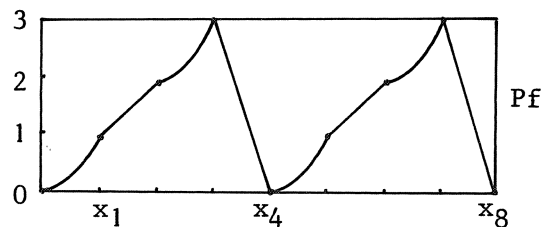
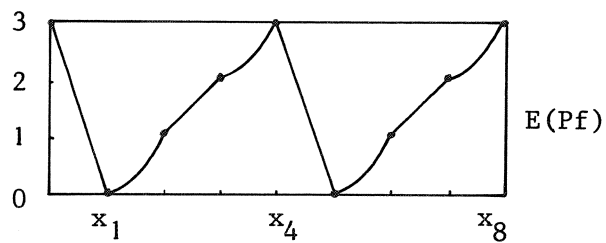
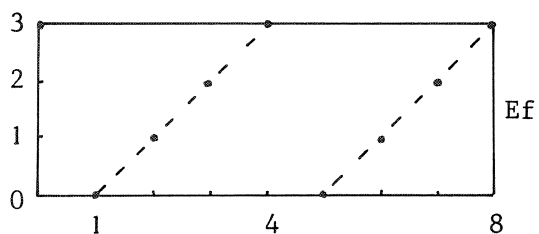
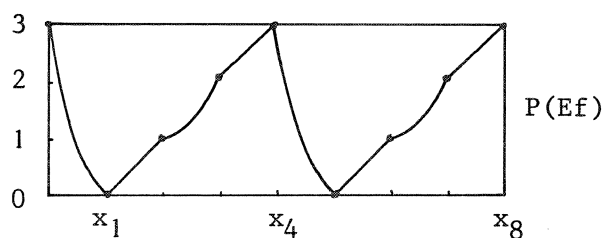
$$n = 4,$$

$$f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \text{ met } f_k \equiv k \pmod{4},$$

en P gegeven door

$$(Pf)(x) = \begin{cases} p(x) = x^2 + bx + c \text{ op } [x_k, x_{k+1}] \text{ voor } k \text{ even,} \\ \quad p(x_k) = f_k \text{ en } p(x_{k+1}) = f_{k+1} \\ \\ q(x) = dx + e \text{ op } [x_k, x_{k+1}] \text{ voor } k \text{ oneven,} \\ \quad q(x_k) = f_k \text{ en } q(x_{k+1}) = f_{k+1} \end{cases}$$

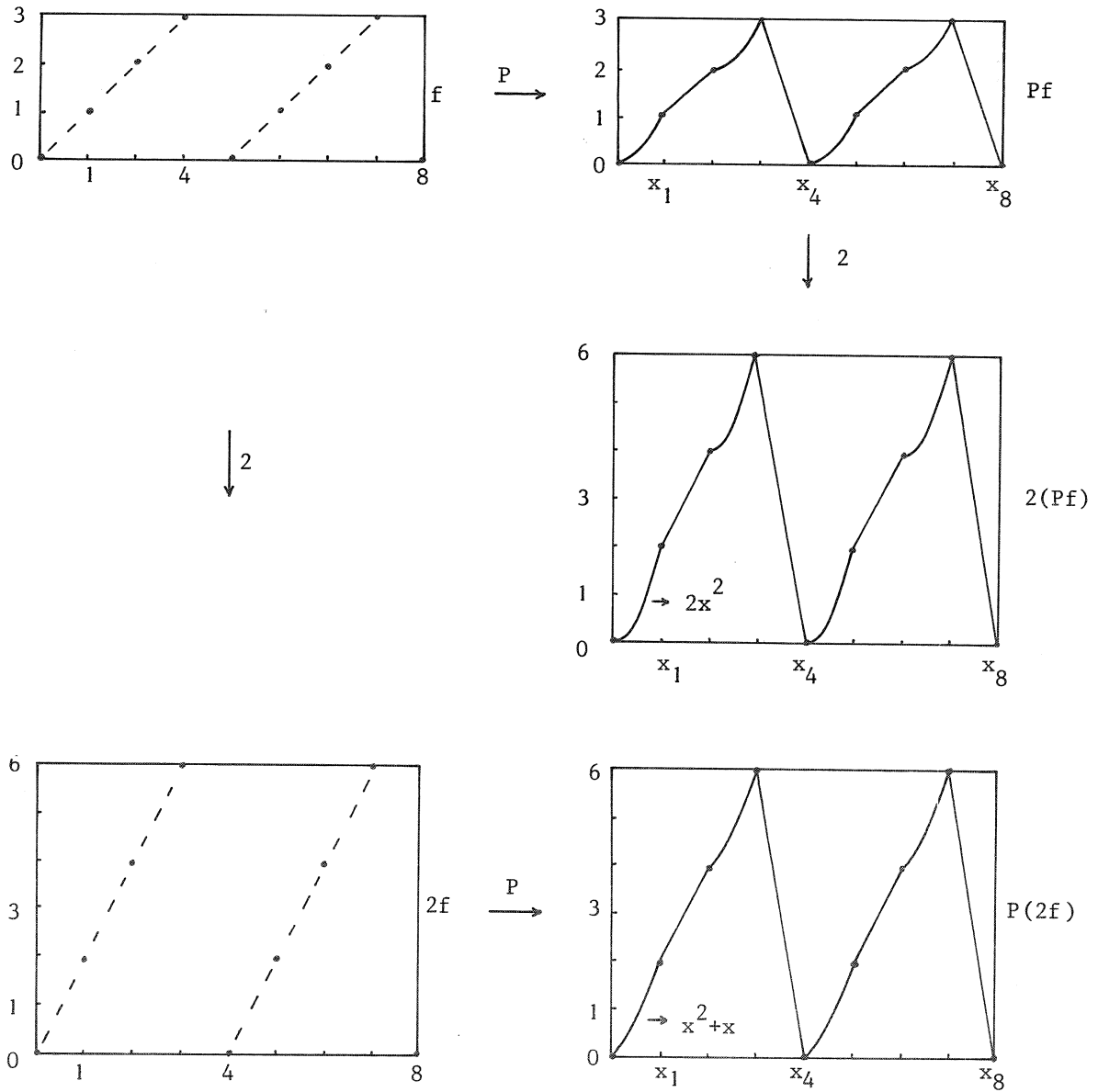
(zoals steeds is $x_k = \frac{2\pi k}{n}$).


 $\xrightarrow{P}$

 $\downarrow E$

 $\downarrow E$

 $\xrightarrow{P}$


Uit de figuur is duidelijk dat $E(Pf) \neq P(Ef)$.

Dit approximatieproces P is blijkbaar niet translatieinvariant.

Dat deze P zelfs niet lineair is blijkt uit onderstaande figuur.



Nog opgemerkt moet worden dat, indien $P(Ef) = E(Pf)$ voor alle $f \in \mathbb{F}_n$, dan ook

$$P(E^k f) = E^k(Pf) \text{ geldt voor alle } f \in \mathbb{F}_n \text{ en alle } k \in \mathbb{N}.$$

6. VERZWAKKINGSFACTOREN

Wij hebben nu alle onderdelen bij elkaar voor de volgende

STELLING [GAUTSCHI]. Zij $f \in \mathbb{F}_n$ en zij $P: \mathbb{F}_n \rightarrow F$ een lineair en translatie-invariant approximatieproces. Dan bestaan er van f onafhankelijke getallen τ_j , $j \in \mathbb{Z}$ met

$$c_j(Pf) = \tau_j \cdot \beta_j(f) \quad \text{voor alle } j \in \mathbb{Z}.$$

De getallen τ_j heten verzwakkingsfactoren ("Abminderungsfaktoren", "attenuation factors").

BEWIJS. Met behulp van de ingevoerde basis voor $\mathbb{F}_n$ en de verschuivingsoperator E is f te schrijven als

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k E^k e^{(0)}.$$

Omdat P lineair en translatie-invariant is, volgt er:

$$\phi = Pf = \sum_{k=0}^{n-1} f_k E^k P e^{(0)}.$$

Schrijven we $\eta_0 = P e^{(0)}$, dat wil zeggen dat η_0 de door P aan $e^{(0)}$ toegevoegde functie uit F is, dan geldt:

$$E^k \eta_0(x) = \eta_0(x - x_k).$$

Hieruit volgt

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \eta_0(x - x_k).$$

De j -de Fourier-coëfficiënt van ϕ kan men dan als volgt berekenen:

$$\begin{aligned}
c_j(\phi) &= c_j(Pf) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_0(x-x_k) e^{-jix} dx \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f_k}{2\pi} e^{-jix_k} \int_0^{2\pi} \eta_0(x-x_k) e^{-ji(x-x_k)} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_0(x) e^{-jix} dx \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_k}
\end{aligned}$$

wegens de periodiciteit van de integrand, en dus

$$c_j(\phi) = c_j(\eta_0) \cdot n \cdot \beta_j(f) = \tau_j \cdot \beta_j(f)$$

met $\tau_j = n \cdot c_j(\eta_0)$. $\square$

We zien dat de verzwakkingsfactoren τ_j niet afhankelijk zijn van f , maar alleen van n en van η_0 , dat wil zeggen van het approximatieproces P . Verschillende approximatieprocessen leveren verschillende verzwakkingsfactoren, in het bijzonder zal het asymptotisch gedrag der $c_j(\phi)$ afhangen van de mate van differentieerbaarheid van ϕ . Het approximatieproces zal dan ook zó gekozen moeten worden dat de "gladheid" van de approximant ϕ goed overeenkomt met de gladheid van de te approximeren functie f . In deze zin zijn de verzwakkingsfactoren dus wél afhankelijk van f .

Maar heeft men eenmaal een gunstig approximatieproces en een geschikte waarde van n gekozen, dan kan men, en dat is de kracht van deze stelling, de Fourier-coëfficiënten c_j van de benaderingsfunctie ϕ verkrijgen uit een simpele vermenigvuldiging van de, voor eens en altijd, berekende τ_j , met de, toch al efficiënt uit FFT verkregen, DFT van f .

In de volgende paragrafen zal ik de gedaante van enige verzwakkingsfactoren laten zien en enkele toepassingen geven. Aan de hand van deze voorbeelden zal ik, hetgeen hierboven is opgemerkt, nog toelichten.

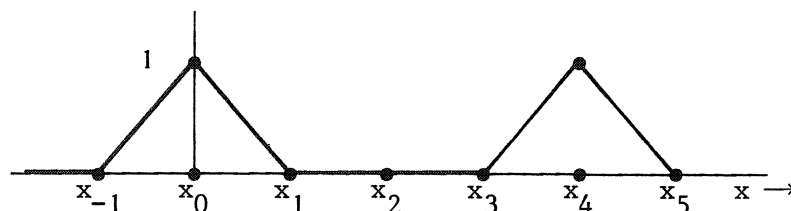
7. SPECIALE GEVALLEN VAN VERZWAKKINGSFACTOREN

Een eenvoudig te berekenen geval is het volgende:

a. [Gautschi]. P is de lineaire interpolatie. Kies $f = e^{(0)}$. Hieruit volgt

$$Pf(x) = Pe^{(0)}(x) = \eta_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h}|x - x_{kn}| & \text{als } |x - x_{kn}| \leq h \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \quad h = 0, 1, 2, \dots, h = \frac{2\pi}{n}$$

Voor $n = 4$ ziet $\eta_0(x)$ er als volgt uit:



De verzwakkingsfactoren τ_j zijn nu gemakkelijk te berekenen uit

$$\begin{aligned} \tau_j &= n \cdot c_j(\eta_0) = \frac{n}{2\pi} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|x|}{h}\right) e^{-jix} dx \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right) \cos jx dx \\ &= \frac{n}{\pi} \frac{2}{hj^2} \sin^2 \frac{jh}{2} . \end{aligned}$$

Met $h = \frac{2\pi}{n}$ volgt dan

$$\tau_j = \left(\frac{\sin \frac{\pi j}{n}}{\frac{\pi j}{n}} \right)^2 .$$

b. [Gautschi]. Voor het geval dat $Pf(x) = p_k(x)$ op ieder interval $[x_k, x_{k+1}]$ met $p_k(x)$ een polynoom van de graad $2r-1$ dat f interpoleert in de $2r$ -punten $x_{k+\ell}$, $\ell = -r+1, -r+2, \dots, r-1, r$ geeft W. Gautschi de volgende

verzwakkingsfactoren $\left(z = \frac{\pi j}{n}\right)$:

$$\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \quad \text{voor } r = 1,$$

$$\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^4 \left[1 + \frac{2}{3} z^2\right] \quad \text{voor } r = 2,$$

$$\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^6 \left[1 + z^2 + \frac{8}{15} z^4\right] \quad \text{voor } r = 3,$$

$$\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^8 \left[1 + \frac{4}{3} z^2 + \frac{14}{15} z^4 + \frac{16}{35} z^6\right] \quad \text{voor } r = 4.$$

c. [Temme]. Indien we voor $Pe^{(0)}$ de "Whittaker cardinal function" (zie [4]) van $e^{(0)}$ kiezen, dan krijgen we (voor n even):

$$\eta_0(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2},$$

en dit levert de verzwakkingsfactoren:

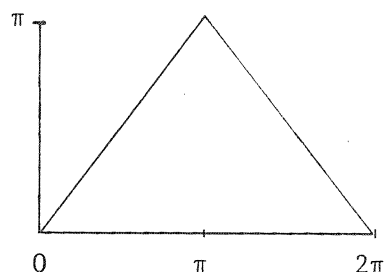
$$\tau_j = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \leq j < \frac{n}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{voor } j = \frac{n}{2} \\ 0 & \text{voor } j > \frac{n}{2} \end{cases}$$

Deze, op oneindig vaak continu differentieerbare functies toepasbare verzwakkingsfactoren zijn voor $j > \frac{n}{2}$ identiek nul.

8. VOORBEELDEN

VOORBEELD 1.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ -x + 2\pi & \text{voor } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



De Fourier-coëfficiënten van $f(x)$ worden gegeven door

$$c_j(f) = \begin{cases} \pi/2 & \text{voor } j = 0 \\ \frac{-2}{\pi j^2} & \text{voor } j \text{ oneven} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Daar f een lineaire functie is kunnen we verwachten met lineaire interpolatie een exact resultaat te krijgen, in dat geval is immers $\phi = P(f) = f$.

Voor $n = 8$ met $\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$, $z = \frac{\pi j}{n}$ wordt het resultaat in onderstaande tabel vermeld.

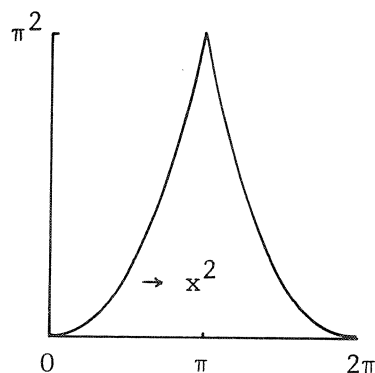
j	$c_j(f)$ (exact)	$\beta_j(f)$ (DFT)	$c_j(\phi)$ $= \tau_j \cdot \beta_j(t)$	verschil $c_j(f) - c_j(\phi)$
0	1.57080	1.57080	1.57080	$2.1 \cdot 10^{-14}$
1	-.63662	-.67038	-.63662	$2.1 \cdot 10^{-14}$
3	-.07074	-.11502	-.07074	0
5	-.02546	-.11502	-.02546	$4.4 \cdot 10^{-16}$
7	-.01299	-.67038	-.01299	$2.8 \cdot 10^{-16}$

In de laatste kolom zien we dat het verschil tussen de exacte waarde $c_j(f)$ en zijn benadering $c_j(\phi)$ ter grootte van de machineprecisie is. In de middelste kolom (DFT) valt op dat $\beta_j = \beta_{n-j}$, in overeenstemming met eigenschap e.1 uit §3.

VOORBEELD 2. De volgende functie is een merkwaardig geval:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ (x-2\pi)^2 & \text{voor } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

De exacte waarden van de Fouriercoëfficiënten worden gegeven door



$$c_0(f) = \frac{\pi^2}{3}, \quad c_j(f) = (-1)^j \frac{2}{j^2}.$$

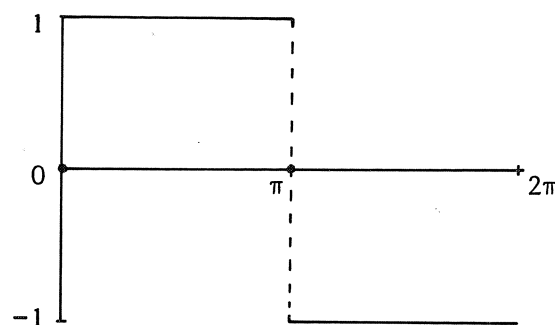
Voor $n = 128$ en $\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$, $z = \frac{\pi j}{n}$ krijgen we het volgende resultaat (ik vermeld alleen de eerste 8 coëfficiënten).

j	$c_j(f)$	$\beta_j(f)$	$c_j(\phi)$	$c_j(f) - c_j(\phi)$
0	3.28987	3.29027	3.29027	$4.0 \cdot 10^{-4}$
1	-2.00000	-2.00040	-2.00000	$2.3 \cdot 10^{-13}$
2	.50000	.50040	.50000	$5.7 \cdot 10^{-14}$
3	-.22222	-.22262	-.22222	$3.4 \cdot 10^{-14}$
4	.12500	.12540	.12500	$1.2 \cdot 10^{-14}$
5	-.08000	-.08040	-.08000	$1.2 \cdot 10^{-14}$
6	.05556	.05596	.05556	$7.1 \cdot 10^{-15}$
7	-.04082	-.04122	-.04082	$1.5 \cdot 10^{-14}$

Op $c_0(f) - c_0(\phi)$ na, variëren de verschillen tussen exacte waarde en benaderde waarde voor de overige 127 coëfficiënten tussen $2.3 \cdot 10^{-13}$ en $7.8 \cdot 10^{-18}$. Een opmerkelijk resultaat, maar waarschijnlijk een toevalstreffer: berekeningen met andere kwadratische functies vertonen niet hetzelfde beeld. Hoewel ϕ hier verkregen wordt door middel van lineaire interpolatie en f en ϕ dus niet identiek zijn, blijkt toch dat $f_j(\phi) = c_j(f)$ voor $j \not\equiv 0 \pmod{n}$, wat door een nogal vervelende berekening in de appendix aangetoond zal worden.

VOORBEELD 3.

$$f(x) = \text{sign}(x) \quad \text{of:} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi \\ +1 & \text{voor } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{voor } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$



De Fourier-coëfficiënten worden gegeven door

$$c_j(f) = \begin{cases} 0 & \text{voor } j \text{ even} \\ \frac{-2i}{\pi j} & \text{voor } j \text{ oneven.} \end{cases}$$

Voor $n = 16$ vinden we met $\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$, $z = \frac{\pi j}{n}$ het volgende (coëfficiënten met even index, die toch gelijk aan nul zijn, zijn weggelaten).

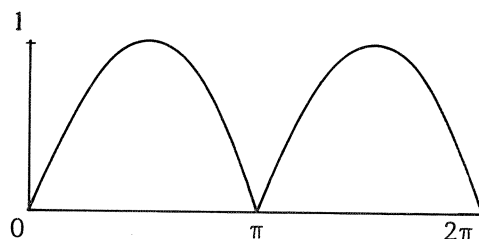
j	$c_j(f)$	$\beta_j(f)$	$c_j(\phi)$
1	-.6366 i	-.6284 i	-.6204 i
3	-.2122 i	-.1871 i	-.1664 i
5	-.1273 i	-.0835 i	-.0599 i
7	-.0909 i	-.0249 i	-.0127 i
9	-.0707 i	+.0249 i	+.0077 i
11	-.0579 i	+.0835 i	+.0124 i
13	-.0490 i	+.1871 i	+.0089 i
15	-.0424 i	+.6284 i	+.0028 i

Twee dingen vallen hierbij op.

- Ten eerste vindt in de $\beta_j(f)$ -kolom bij $j = 9$ een tekenomslag plaats (en dientengevolge ook in de $c_j(\phi)$ -kolom, de τ_j zijn immers positief). Deze tekenomslag laat zich gemakkelijk verklaren uit eigenschap (f) van paragraaf 3, we hebben hier met een anti-symmetrische f te maken.
- Ten tweede zijn de coëfficiënten $c_j(f)$ en $c_j(\phi)$, afgezien van het teken, niet van dezelfde grootte. Een verklaring hiervoor is gelegen in het feit dat f een niet-continue functie is, terwijl de approximant ϕ (verkregen uit lineaire interpolatie) *continu* is. We hebben hier dus te maken met functies uit verschillende continuïteitsklassen en dientengevolge zijn ook hun Fourier-coëfficiënten totaal verschillend.

VOORBEELD 4.

$$f(x) = |\sin x|$$



$$c_j(f) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(j-1)(j+1)} & \text{voor } j \text{ even} \\ 0 & \text{voor } j \text{ oneven.} \end{cases}$$

Voor $n = 8$ en $\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$, j even, zijn de resultaten in onderstaande kolommen vermeld:

j	$c_j(f)$	$\beta_j(f)$	$c_j(\phi)$
0	.637	.604	.604
2	.212	.250	.203
4	.042	.104	.042
6	.018	.250	.023
8	.010	.604	0
10	.006	.250	.008
12	.004	.104	.005
14	.003	.250	.004

De onderste helft van deze tabel is berekend met behulp van de bovenste helft. Er geldt immers

$$c_{j+n}(\phi) = \tau_{j+n} \cdot \beta_{j+n}(f) = \tau_{j+n} \cdot \beta_j(f)$$

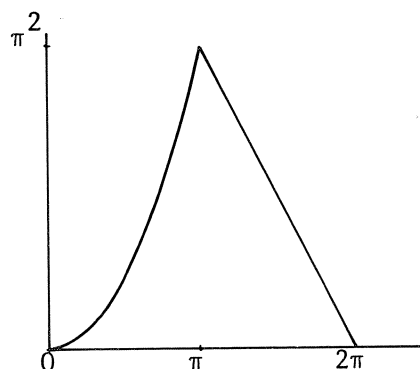
wegens de periodiciteit van β_j (zie §3, eigenschap (a)).

Opvallend is dat $c_8(\phi) = 0$. Dit komt doordat $\tau_8 = 0$. Dit geldt niet alleen voor dit speciale geval, maar voor alle verzwakkingsfactoren die in §7 worden genoemd. In het algemeen is $\tau_{kn} = 0$ voor $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

VOORBEELD 5.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\pi x + 2\pi^2, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$c_j(f) = \begin{cases} \frac{5\pi^2}{12} & \text{voor } j = 0 \\ \frac{-2}{j^2} + \frac{2i}{\pi j^3} & \text{voor } j \text{ oneven} \\ \frac{1}{j^2} & \text{voor } j \text{ even } (j \neq 0). \end{cases}$$



Voor $n = 8$ en $\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$ heb ik de volgende resultaten verkregen.

j	$c_j(f)$	$\beta_j(f)$	$c_j(\phi)$
0	4.112	4.164	4.164
1	$-2.000 + .637 i$	$-2.106 + .636 i$	$-2.000 + .604 i$
2	.250	.308	.250
3	$-.222 + .024 i$	$-.361 + .019 i$	$-.222 + .012 i$
4	.063	.154	.063
5	$-.080 + .005 i$	$-.361 - .0191 i$	$-.080 - .004 i$
6	.028	.308	.028
7	$-.041 + .002 i$	$-2.106 - .636 i$	$-.041 - .012 i$

Wat opvalt is dat het reële deel van $c_j(\phi)$ (op $c_0(\phi)$ na) exact is (evenals bij voorbeeld 2 het geval was). Het imaginaire deel van $c_j(\phi)$ is verre van exact; we zien hier ook halverwege een tekenomslag.

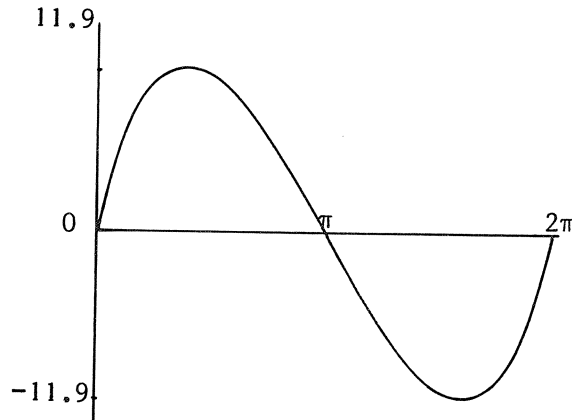
Het lijkt erop alsof de verzwakkingsfactoren niet in staat zijn om zowel het reële als imaginaire deel van de $\beta_j(f)$ tegelijk op de juiste wijze te verzwakken ($\text{Im } c_j(\phi)$ is zelfs niet monotoon dalend).

VOORBEELD 6.

$$f(x) = x(x-\pi)(x-2\pi).$$

Dit is een functie uit $C^1(-\infty, \infty)$.

$$c_j(f) = \begin{cases} 0 & \text{voor } j = 0 \\ -\frac{6i}{j^3} & \text{anders.} \end{cases}$$



Voor $n = 64$, $\tau_{1j} = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$ en $\tau_{2j} = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^4 \left(1 + \frac{2}{3} z^2\right)$ respectievelijk, vinden we voor sommige waarden van j :

j	$c_j(f)$	$c_j(\phi_1)$	$c_j(\phi_2)$
1	-6.000000 i	-5.995180 i	-5.999989 i
8	-.011719 i	-.011110 i	-.011635 i
16	-.001465 i	-.001150 i	-.001316 i
24	-.000434 i	-.000212 i	-.000251 i
32	-.0002 i	0	0
40	-.000094 i	+.000076 i	+.000060 i
48	-.000054 i	+.000013 i	+.000057 i
56	-.000034 i	+.000227 i	+.000027 i
63	-.000024 i	+.001511 i	+.000003 i

Ook in dit voorbeeld zien we een tekenomslag na $j = n/2$. Bovendien is $c_{32}(\phi_1) = c_{32}(\phi_2) = 0$. Zo te zien geeft geen van beide interpolatieprocessen een bevredigend resultaat. Een verklaring zou kunnen zijn, dat f enerzijds en ϕ_1 en ϕ_2 anderzijds tot verschillende continuïteitsklassen behoren.

9. CONCLUSIES

Uit de hieraan voorafgaande voorbeelden blijkt dat het gebruik van verzwakkingsfactoren niet zo'n simpele zaak is als het op het eerste gezicht lijkt.

Ten eerste zal men het interpolatieproces zó moeten kiezen, dat de resulterende interpolatiefunctie ϕ tot dezelfde continuïteitsklasse behoort als f .

Ten tweede doen er zich moeilijkheden voor, die voor een deel samenhangen met eigenschappen van DFT, waarvan sommige al in §3 genoemd zijn. Ik zet hier de moeilijkheden nog eens op een rijtje:

- a) DFT kan voor $j = 0$ en $j = \frac{n}{2}$ ten onrechte een coëfficiënt gelijk aan nul opleveren.
- b) DFT heeft de eigenschap $\beta_{n-j} = \overline{\beta_j}$. Hieruit volgt de tekenomslag halverwege de set coëfficiënten.
- c) De verzwakkingsfactoren, zoals die in §7 voorkomen, zijn voor de waarden $j \equiv 0 \pmod n$, $j \neq 0$ gelijk aan nul.

De conclusie lijkt gerechtvaardigd dat additionele informatie over de functie f , zoals het aantal continue afgeleiden, nodig is.

Wat betreft de praktische kant van de zaak moet men erop verdacht zijn, dat de functie f zelf niet gekend is, maar slechts "functiewaarden" van een *denkbeeldige* functie f in de punten x_k . Juist dan zal men over additionele informatie moeten beschikken als men enigszins wil vertrouwen op de berekende Fourier-coëfficiënten van de functie ϕ , die een denkbeeldige functie f approximeert.

10. VOORBEELD VAN EEN ALGOL 60 PROGRAMMA

```

begin integer n, γ; real pi;
  procedure four coef (rez, imz, γ); value γ; integer γ; array rez, imz;
  begin integer j, n; n:= 2**γ
    fft real (rez, imz, γ, true); comment fft real is een in
    een of andere bibliotheek aanwezige fast fourier transform
    procedure voor reële input data;

    for j:= 1 step 1 until (n/2)-1 do
      begin real arg, tau, s;
        arg:= pi*j/n; s:= sin(arg);
        tau:= s/arg; tau:= tau*tau;

        comment tau is nu gelijk aan:  $(\frac{\sin \pi j/n}{\pi j/n})^2$ ;

        rez[j]:= tau*rez[j]/n; imz[j]:= tau*imz[j]/n;
        tau:= s/(pi-arg); tau:= tau*tau;

        comment tau is nu gelijk aan  $(\frac{\sin \pi(n-j)/n}{\pi(n-j)/n})^2$ ;

        rez[n-j]:= tau*rez[n-j]/n; imz[n-j]:= tau*imz[n-j]/n
      end;

      rez[0]:= rez[0]/n; imz[0]:= imz[0]/n;
      rez[n/2]:= rez[n/2]*4/(pi*pi*n);
      imz[n/2]:= imz[n/2]*4/(pi*pi*n)
    end four coef;

    pi:= 3.14159 26535 8979;
    γ:= 6;
    n:= 2**γ;

    begin array rez, imz[0, n-1]; integer k, real x;
      for k:= 0 step 1 until n-1 do
        begin real x;
          x:= 2*pi*k/n;
          rez[k]:= if x < pi then x*x
                    else (x-2*pi)**2
        end dit is de functie uit voorbeeld 2, §8;
        four coef (rez, imz, γ)
      end
    end
  end

```

LITERATUUR

- [1] E.O. BRIGHAM, *The fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, 1974.
- [2] W. GAUTSCHI, *Attenuation Factors in practical Fourier Analysis*, Numer. Math. 18, p.373-400, 1972.
- [3] J. STOER, *Einführung in die numerische Mathematik I*, Heidelberger Taschenbücher 105, 1972.
- [4] J. McNAMEE, F. STENGER & E.L. WHITNEY, *Whittaker's cardinal Function in Retrospect*, Math. Comp. 25, p.113, 1971.
- [5] C.G. VAN DER LAAN, *Colloquium Numerieke Programmatuur*, J.C.P. Bus (ed.), MC Syllabus 29.1b, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1976.

APPENDIX

In §8, voorbeeld 2, is sprake van de functie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ (x-2\pi)^2 & \text{voor } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}.$$

Ik zal hier laten zien dat voor deze functie, met $\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$, $z = \frac{\pi j}{n}$, de volgende relatie geldt:

$$c_j(f) = \tau_j \cdot \beta_j(f), \quad j \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

BEWIJS. Rechtstreekse berekening van de Fourier-coëfficiënten van f via vergelijking (2) levert

$$c_j(f) = (-1)^j \cdot \frac{2}{j^2}.$$

We moeten dus bewijzen dat $\tau_j \cdot \beta_j(f)$ hieraan gelijk is voor alle $j \in \mathbb{Z}$, $j \not\equiv 0 \pmod{n}$. Welnu,

$$\beta_j(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_k}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x_k = \frac{2\pi k}{n}.$$

Daar f een even functie is, geldt $\beta_j \in \mathbb{R}$, dus

$$\beta_j(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos jx_k.$$

Omdat zowel de functiewaarde f_k als $\cos jx_k$ symmetrisch ten opzichte van $x = \pi$ liggen, kunnen wij ook schrijven:

$$\beta_j(f) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n/2} f_k \cos jx_k = \frac{8\pi^2}{n^3} \sum_{k=1}^{n/2} k^2 \cos jx_k.$$

(Het accent aan het sigma-teken betekent hier dat de laatste term, dus voor $k = n/2$, gehalveerd moet worden.)

We vinden dus, met $\tau_j = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$, $z = \frac{\pi j}{n}$

$$(*) \quad \tau_j \cdot \beta_j(f) = \frac{8}{n^2} \sin^2 z \sum_{k=1}^{n/2} k^2 \cos 2zk.$$

Ik zal nu een voor ons doel bruikbare uitdrukking voor de eindige som uit (*) afleiden. Uit

$$\sum_{k=0}^{n/2} r_k = \frac{1 - r^{\frac{n}{2}+1}}{1 - r}$$

volgt door middel van de substitutie $r = e^{i2x}$ dat

$$\sum_{k=0}^{n/2} e^{i2kx} = \frac{1 - e^{i(n+2)x}}{1 - e^{i2x}} = e^{i\frac{n}{2}x} \cdot \frac{\sin(\frac{n}{2}+1)x}{\sin x}.$$

Nemen we links en rechts het reële deel, dan vinden we voor alle x waarvoor $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n/2} \cos 2kx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} + 1 \right),$$

oftewel

$$\sum_{k=1}^{n/2} \cos 2kx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} - 1 \right).$$

Tweemaal differentiëren van beide leden naar x levert:

$$\begin{aligned} -8 \sum_{k=1}^{n/2} k^2 \cos 2kx - n^2 \cos 2nx = \\ - \frac{(n^2+2n)\sin(n+1)x}{\sin x} - \frac{2(n+1)\cos x \cos(n+1)x}{\sin^2 x} + \frac{2\sin(n+1)x \cos^2 x}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

Via de substitutie $x = \frac{\pi j}{n}$ ($= z$) en vermenigvuldiging links en rechts met $-\frac{\sin^2 z}{nj^2}$ vinden we tenslotte:

$$\begin{aligned} \tau_j \cdot \beta_j(f) + \frac{n}{j^2} \sin^2 x \cos \pi j = \\ \frac{1}{nj^2} \left[(n^2+2n)\sin(n+1)z \sin z + 2(n+1)\cos z \cos(n+1)z - \frac{2\sin(n+1)z \cos^2 z}{\sin z} \right]. \end{aligned}$$

Voor j even geldt: $\sin(n+1)z = \sin z$

$$\cos(n+1)z = \cos z$$

$$\cos \pi j = 1.$$

Dit levert:

$$\tau_j \circ \beta_j(f) + \frac{n}{j^2} \sin^2 z = \frac{n}{j^2} \sin^2 z + \frac{2}{j^2},$$

oftewel:

$$\tau_j \circ \beta_j(f) = \frac{2}{j^2}.$$

Voor j oneven geldt: $\sin(n+1)z = -\sin z$

$$\cos(n+1)z = -\cos z$$

$$\cos \pi j = -1.$$

Dit levert:

$$\tau_j \circ \beta_j(f) - \frac{n}{j^2} \sin^2 z = -\frac{n}{j^2} \sin^2 z - \frac{2}{j^2}.$$

Dus

$$\tau_j \circ \beta_j(f) = (-1)^j \frac{2}{j^2},$$

met uitzondering van die j waarvoor $\sin z = 0$, dat wil zeggen voor alle $j \in \mathbb{Z}$, $j \not\equiv 0 \pmod n$. $\square$

ONTVANGEN 25 AUG. 1977